EXAMEN PARTIEL 1

MAT-1200: Introduction à l'algèbre linéaire — Automne 2012
Date: 19 octobre.

Remarques:

- Durée de l'examen: deux heures.
- Documents admis: deux feuilles 8 1/2 × 11, recto-verso.
- Seulement les calculatrices avec l'auto-collant de la Faculté seront admises.
- Vous êtes priés de vous identifier (nom et numéro de matricule) sur le cahier et de placer votre carte d'identité sur la table à côté de vous.

Question 1. (2 + 6 + 4 + 4 + 4 points)

On se donne un système linéaire

$$(S)\left\{\begin{array}{lcr} x+2y+z & = & 3 \\ ay+5z & = & 10 \\ 2x+7y+az & = & b \end{array}\right.$$

d'inconnues x, y, z et dépendant de deux paramètres réels a et b.

a) Donner la matrice augmentée du système (S).

b) Utiliser la méthode d'élimination de Gauss pour mettre la matrice augmentée du système sous forme échelon.

c) Pour quelles valeurs de a, le système S possède-t-il une solution unique? Justifier votre réponse.

d) Pour quelles valeurs de a et b, ce système possède-t-il une infinité de solutions? Justifier votre réponse.

e) Pour quelles valeurs de a et b, ce système est-il inconsistant? Justifier votre réponse.

Question 2. (7 + 8 + 5 points)

Soit A la matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

a) Écrire la matrice A sous la forme d'un produit de matrices élémentaires (c'est-à-dire $A = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1$).

b) Justifier pourquoi la matrice A est inversible? Déterminer l'inverse de A.

c) Soit la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système $AX = B$.

Question 3. (3 + 3 + 3 + 3 + 3 points)

Répondre par vrai ou faux à chacun des énoncés suivants. Dans chacun des cas, fournir une brève justification.

a) Soit A une matrice de format 4×5, le système linéaire $A\vec{x} = \vec{0}$ admet une infinité de solutions.

b) Quatres vecteurs quelconques qui engendrent $\mathbb{R}^4$ forment toujours une base de $\mathbb{R}^4$.

c) Si une matrice carrée A vérifie que $A^2 = 0$, alors $A = 0$.

d) $\{a + x + bx^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace de l'espace des polynômes de degré au plus 2.

e) Une matrice carrée de format 3×3 dont la somme des 3 lignes donne le vecteur nul, est une matrice qui n'est pas inversible.

Question 4. (12 + 8 points)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 13 \end{pmatrix}$$

a) Calculer la factorisation LU de cette matrice fournie par l'algorithme d'élimination de Gauss.

b) La factorisation LU n'est pas unique. Une autre factorisation de A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Utiliser obligatoirement cette nouvelle factorisation pour résoudre le système linéaire

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Ne pas oublier de vérifier votre réponse!

Question 5. (6 + 4 + 8 + 7 points)

On considère l'ensemble $S_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ formé des 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

et on pose $E = lin(S_1)$ le sous-espace engendré par S_1.

a) Peut-on affirmer que $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \in E$? Si oui, trouver des nombres k_1, k_2, k_3 tels que $\vec{w} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3$.

b) Est-ce que $S_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ engendre $\mathbb{R}^3$? Justifier.

c) Déterminer une base de E et déduire sa dimension.

d) Considérons une autre famille $S_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{w}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que l'espace engendré par S_2 est le même que E, c'est-à-dire que $lin(S_1) = lin(S_2)$.